

LES MODELES ARCH ET GARCH : *Application au CAC40*

Réalisé par :

El Griny Bouchaib¹, Kouaiba Ghizlane², Imegri Meriem³, El Qalli Yassine⁴ and Driss Mentagui

(1, 2,3,4) : Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée
BP 6217, Madinat Al Irfane, Rabat-Instituts, 10100, Rabat, Maroc

Et par : Driss Mentagui

Université Ibn Tofail, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques
Kénitra, Maroc

Résumé :

L'analyse de certaines séries chronologiques émanant du monde économique et financier (taux de change, taux de rendement d'action, indices,...) montre des caractéristiques spécifiques qui ne sont pas théoriquement prises en compte dans les modélisations ARIMA notamment celle de Box Jenkins. La première caractéristique concernée est la dépendance de la variance conditionnelle du temps, autrement dit le comportement hétéroscédastique de la variance (en plus, les périodes de grande variabilité sont groupées, tandis que les petites variations sont plutôt suivies par de petits changements). La deuxième caractéristique concerne la distribution probabiliste de la série (L'apparition de chocs n'est pas compatible avec la loi normale). Alors pour une modélisation plus réaliste de ces séries, les modèles ARCH/GARCH sont les plus utiles.

Au cours de cette étude, nous allons d'abord étudier les modèles ARCH et GARCH d'un point de vue théorique où nous allons aborder la majorité des propriétés et des conditions à remplir par les modèles, puis nous allons les appliquer à l'un des indices boursiers les plus universelles (CAC40).

Summary:

The analysis of certain time series from the economic and financial world (exchange rate, rate of return of shares, indexes, etc.) shows specific characteristics that are not theoretically taken into account in ARIMA modeling Box Jenkins. The first characteristic concerned is the dependence of the conditional variance of time, in other words we are concerned by the

heteroscedastic behavior of the variance (in addition, the periods of great variability are grouped, while the small variations are rather followed by small changes). The second characteristic concerns the probabilistic distribution of the series (the appearance of shocks is not compatible with the normal law). Then for a more realistic modeling of these series, ARCH / GARCH models are the most useful.

During this investigation, we will first study the ARCH and GARCH models from a theoretical point of view where we will address the majority of the properties and conditions to be fulfilled by the models, then we apply them to one of the indices (CAC40).

Mots-clés: ARCH, GARCH, CAC 40, volatilité hétéroscédastique.

2010 MSC :97K60, 97K80, 91G70, 91G80.

I. Introduction

Dans le but de mettre en pratique les différents fondements théoriques, nous avons élaboré une étude portant sur les modèles ARCH et GARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity and Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity). Ce sont des modèles qui jouent un rôle primordial au niveau de la description des séries financières vu le comportement hétéroscédastique de leur variance, chose qui a toujours été mal considérée par les modèles ARIMA dans lesquels on suppose que la variance est inconditionnelle par rapport au temps. En effet, face aux anomalies des représentations ARMA pour les problèmes monétaires et financiers, Engle (1982) [1, 2, 3,6] a mis, à la disposition de l'ensemble des acteurs du marché financier, une nouvelle catégorie de modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques aptes à capter le comportement de la volatilité dans le temps. Cette dernière est un paramètre de mesure du risque du rendement et du prix. La volatilité sert également aux calculs pour optimiser la diversification des portefeuilles d'actifs financiers (MEDAF). Les séries monétaires et financières sont caractérisées par le regroupement (clustering) de la volatilité, à savoir les périodes de forte volatilité alternent avec les périodes de faible volatilité. Ce phénomène, que nous appelons aussi l'hétéroscédasticité conditionnelle.

II. Aperçu théorique

L'idée principale proposée par Engle (1982) [1,2,3,6,7,8] consiste à supposer que la variance dépend de l'ensemble informationnel dont on dispose. Il propose une spécification ARCH où le carré des perturbations suit un processus autorégressif. Les modèles ARCH sont donc des modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques. Engle (1982) a donc proposé ces processus [1,2,3,5,6,7,8] pour pallier aux insuffisances de la classe des représentations ARMA, notamment en ce qui concerne les séries financières qui présentent une volatilité (ou variabilité instantanée mesurée par la variance conditionnelle) en fonction du temps. Ainsi, La famille des modèles ARCH peut se décomposer en deux sous-ensembles : les modèles ARCH linéaires et les modèles ARCH non linéaires. Les premiers reposent sur une spécification quadratique de la variance conditionnelle des perturbations : modèles ARCH, GARCH et IGARCH. Les modèles ARCH non linéaires sont caractérisés par des

spécifications asymétriques des perturbations. Ce sont les modèles EGARCH, TARARCH et TGARCH.

II.1 Le modèle ARCH (p)

Commençant tout abord à présenter le modèle ARCH(1) introduit par Engle (1982). Le processus x_t est un processus ARCH (1) si $x_t = \sqrt{h_t}\epsilon_t$ tel que ϵ_t est un bruit blanc gaussien, $\epsilon_t \sim N(0,1)$ et $h_t = w_0 + w_1x_{t-1}^2$ représente la variance conditionnelle du processus x_t . [2,5,6].

Les moments conditionnels se représentent comme suit [7] :

$$\begin{aligned} E[x_t/h_t] &= E[\sqrt{h_t}\epsilon_t/h_t] \\ &= \sqrt{h_t} E[\epsilon_t/h_t] \\ &= 0 \end{aligned}$$

La variance conditionnelle s'exprime de la manière suivante [7] :

$$\begin{aligned} V[x_t/h_t] &= V[\sqrt{h_t}\epsilon_t/h_t] \\ &= h_t V[\epsilon_t/h_t] \\ &= h_t E[\epsilon_t^2/h_t] \\ &= h_t \end{aligned}$$

On détermine l'espérance non conditionnelle du processus x_t comme suit [7]:

$$\begin{aligned} E[x_t] &= E[E[x_t/h_t]] \\ &= E[0] \\ &= 0 \end{aligned}$$

La variance du processus à l'instant t est donnée par [2,7] :

$$V[x_t] = \frac{w_0}{1 - w_1}$$

De même la covariance de ce processus est définie par [6,7] :

$$\text{cov}[x_t, x_{t+h}/x_{t-m}] = 0 \quad \forall h > 0 \quad \forall m > 0 \quad [5,6].$$

Un processus ARCH (p) est un processus x_t défini par [1,2,6,7] :

$$x_t = \sqrt{h_t}\epsilon_t$$

$$h_t = w_0 + \sum_{i=1}^p w_i x_{t-i}^2$$

L'espérance du processus est donnée par [1,7] :

$$E[x_t] = 0$$

De ce qui est la variance, il suffit de définir une formule de récurrence de façon à exprimer explicitement cette variance en passant par le calcul de la limite. A ce stade on ne ferait pas les calculs, on se contente de fournir le résultat et de supposer que si $|\sum_{i=1}^p w_i| < 1$, alors la variance du processus existe et elle s'exprime par la formule suivante [1,7]:

$$V[x_t] = \frac{w_0}{1 - \sum_{i=1}^p w_i}$$

II.2 Le modèle GARCH (p, q) :

Un processus GARCH (1,1) s'écrit de la forme [7] :

$$x_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t$$

$$h_t = w_0 + w_1 x_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

Avec $\epsilon_t \sim N(0,1)$ comme c'est précédemment défini et $h_t = w_0 + w_1 x_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$ représente la variance conditionnelle du processus.

Ainsi, on fournit les moments conditionnels :

$$E[x_t/F_t] = 0$$

où F_t représente la filtration engendrée par les valeurs passées de x_t, x_t^2 et de h_t . De ce fait, la variance conditionnelle du modèle sera alors [7] :

$$V[x_t/F_t] = V[\sqrt{h_t} \epsilon_t / F_t]$$

$$= h_t V[\epsilon_t / F_t]$$

$$= h_t$$

Pour ce qui est des moments non conditionnels, l'espérance ainsi que la variance du processus s'obtiennent de la façon suivante [7] :

$$E[x_t] = E[E[x_t/h_t]]$$

$$= 0$$

De même [7] :

$$V[x_t] = \frac{w_0}{1 - (w_1 + \beta_1)}$$

Un modèle GARCH (p, q) s'écrit de la façon suivante [1,2,6,7]:

$$x_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t$$

$$h_t = w_0 + \sum_{i=1}^p w_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}$$

L'espérance s'obtient simplement à partir de la loi des espérances itérées [1,2] :

$$E[x_t] = E[E[x_t/h_t]]$$

$$= 0$$

Si le processus GARCH (p, q) est stationnaire au second ordre, on aura alors [1,2,7,8] :

$$\sum_{i=1}^p w_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

Cette condition s'avère nécessaire pour définir la variance non conditionnelle par (voir [1,2]) :

$$V[x_t] = \frac{w_0}{1 - (\sum_{i=1}^p w_i + \sum_{j=1}^q \beta_j)}$$

II.3 Les Conditions de la stationnarité (voir à ce titre [1,2,7,8])

Un processus ARCH(p) est dit stationnaire si

$$\sum_{i=1}^p w_i < 1$$

Un processus GARCH (p, q) est dit stationnaire si

$$\sum_{i=1}^p w_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

Si on met

$$v_t = x_t^2 - h_t$$

Donc

$$x_t^2 = h_t + v_t$$

$$x_t^2 = w_0 + \sum_{i=1}^p w_i x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j} + v_t$$

Soit $m = \max(p, q)$ et si on suppose que $w_i = 0$ pour $i > p$ et $\beta_j = 0$ pour $j > q$, alors on aura x_t^2 est sous la forme d'un modèle ARMA (m, q) :

$x_t^2 = w_0 + \sum_{i=1}^m (w_i + \beta_i)x_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q -\beta_j v_{t-j} + v_t$ Avec v_t est une pure innovation gaussienne.

II.4 Les conditions de la normalité :

Pour qu'une série chronologique soit normale, elle doit vérifier les conditions suivantes [1, 3, 6, 8] :

Un Skewness nul (moment centré d'ordre 3). Si ce n'est pas le cas, la distribution sera donc asymétrique.

Un Kurtosis égale 3 (moment centré d'ordre 4). Si cette statistique est supérieur à 3 la distribution sera plus aplatie qu'une gaussienne.

Afin de déterminer la normalité des données, on fait recours au test d'hypothèse suivant :

H_0 : les données suivent une loi normale VS. H_1 : les données ne suivent pas une loi normale avec $JB = \frac{n-k}{6} (S^2 - \left(\frac{K-3}{4}\right)) \sim \chi_{(2)}$ (la statistique de Jarque Bera).

n= Nombre d'observations.

k= Nombre de variables explicatives si les données proviennent des résidus d'une régression linéaire. Sinon, k= 0.

S = Skewness : Moment d'ordre 3 d'une variable centrée-réduite.

K =Kurtosis : Moment d'ordre 4 d'une variable centrée-réduite.

Une loi normale a un coefficient d'asymétrie = 0 et un Kurtosis = 3. On saisit alors que si les données suivent une loi normale, le test s'approche alors de 0 et on accepte (on ne rejette pas) H_0 au seuil α .

III. Application

III.1. Détermination du modèle

Nous constatons, que les variations entre observations peuvent parfois être trop agitées par rapport à d'autres situations où ces variations sont assez régulières.

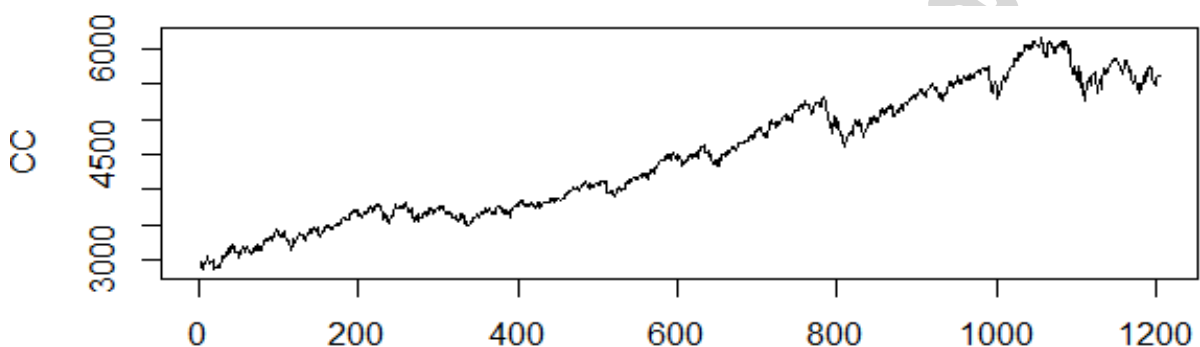


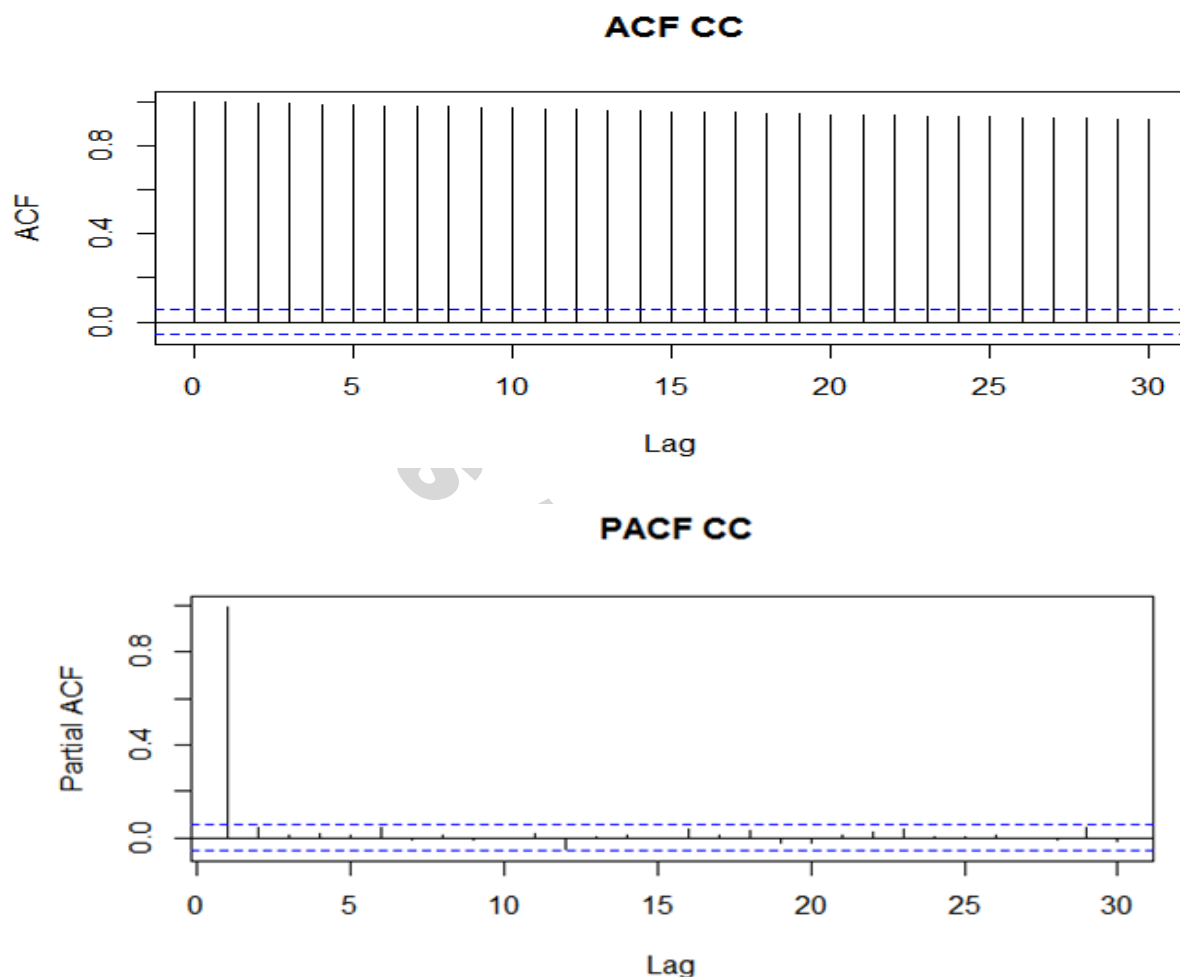
Diagramme séquentiel de la série CAC 40

L'allure de ce graphe met en évidence la non-stationnarité puisqu'elle semble présenter:

- une rupture de tendance.
- une volatilité qui varie au cours du temps.

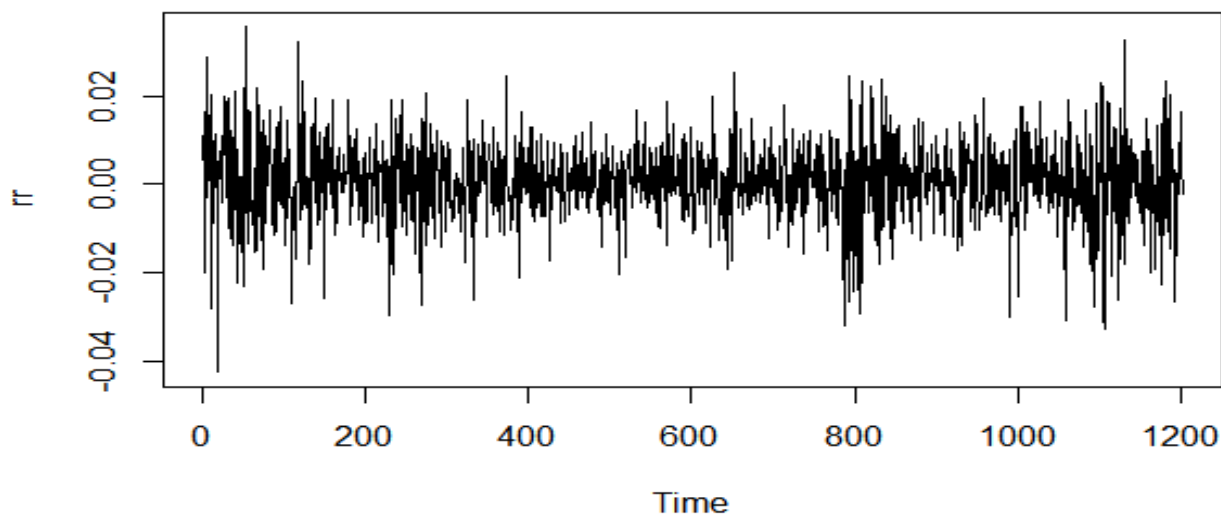
Une première approche intuitive du phénomène de rupture découle de ce graphe séquentiel et nous amène à étudier les corrélogrammes de la série pour plus de précision.

A ce niveau, nous allons nous intéresser aux fonctions d'autocorrélations ACF et d'autocorrélations partielles PACF, dans le but d'en tirer des résultats pouvant nous guider à choisir le bon modèle.



Les fonctions d'auto corrélation AFC et d'auto corrélation partielles PACF de la série CAC

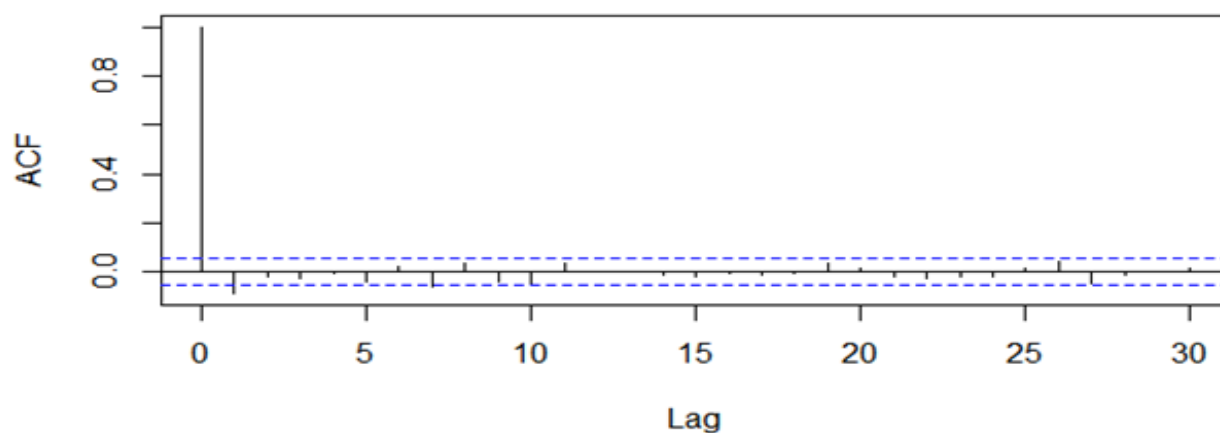
La non-stationnarité de la série est bien mise en évidence à travers la décroissance lente de la fonction d'auto-corrélation obtenue ci-dessus. Sous l'hypothèse de non stationnarité du processus, nous différencions une première fois en passant par le calcul des rendements, ensuite nous examinons le corrélogramme de la série différenciée [4].



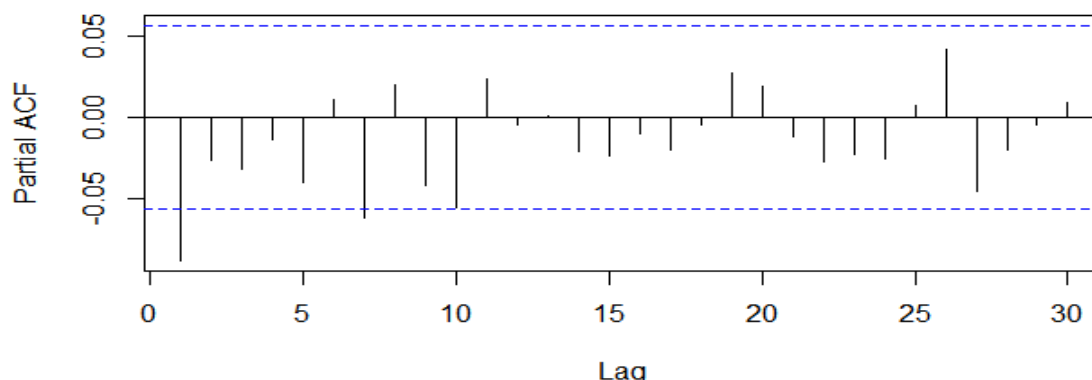
Le diagramme séquentiel des rendements

Remarquons que l'effet de la différenciation est palpable à travers le graphe obtenu dans la mesure où la série ne semble plus présenter de tendance. A ce stade, nous allons examiner les corrélogrammes de cette série.

ACF du rendement a



PACF du rendement a



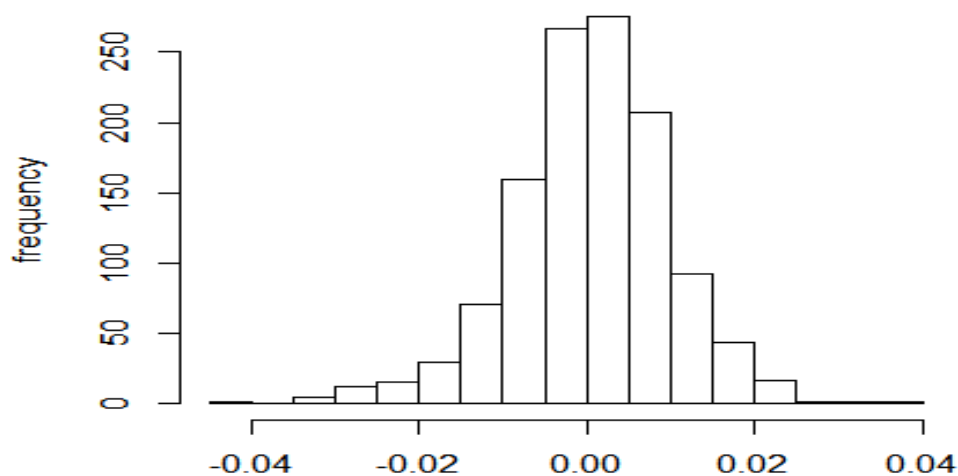
Les fonctions d'auto corrélation et fonction d'auto corrélation partielle des rendements

Les corrélogrammes nous invitent alors à tester l'hypothèse de bruit blanc sur la série différenciée puisque le graphe de la fonction d'auto corrélation comme celui de la fonction d'auto corrélation partielle ne présentant pas de pics significatifs aux premiers ordres de décalages, nous penserons une marche aléatoire.

En ce qui concerne le graphe séquentiel de la série différenciée, il se caractérise par des variations non constantes au cours du temps.

En effet, à l'encontre de l'hypothèse de variance constante des bruits blancs, il existe des périodes à faible variation et des périodes à très grande volatilité. Par ailleurs, cette série laisse apparaître un phénomène de mémoire. En d'autres termes, si la variance de la série est importante à un instant t alors il y a de fortes chances qu'elle le soit aussi à l'instant qui suit étant donné que les moments de grande variabilité semblent être regroupés.

histogramme a



Histogramme et coefficients de distribution et de dispersion des rendements

Tout d'abord, nous constatons que la série n'est pas gaussienne, ayant des queues de distribution trop épaisses, ce que nous confirmerons par les tests suivants :

```
> #analyse univariee  
> layout(matrix(1:2, 2, 1))  
> plot(density(a$rr), main="Estimateur de la densite des log-returns")  
> qqnorm(a$rr, main="QQ plot")
```

```
> library(moments)
```

```
> kurtosis(a$rr)  
[1] 4.225204  
> skewness(a$rr)  
[1] -0.307673
```

```
> jarque.bera.test(a$rr)
```

Jarque Bera Test

```
data: a$rr  
X-squared = 94.224, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

Remarquons que le coefficient d'aplatissement Kurtosis est égal à « 4.23038 » qui est supérieure à 3. De même, le coefficient d'asymétrie Skewness étant de l'ordre de « -0,33702 » n'est pas nul.

En outre, le test de Jarque Bera[3] donne un résultat de 98.7363 et une p-value < 2.2e-16 (La p-value est la probabilité, sous H_0 , d'obtenir une statistique aussi extrême (pour ne pas dire aussi grande) que la valeur observée sur l'échantillon. La p-value à un seuil préalablement défini (traditionnellement 5 %). Si la valeur-p est inférieure à ce seuil, on rejette l'hypothèse nulle (H_0) en faveur de l'hypothèse alternative. Autrement dit p – value: $p(T > t/H_0)$ avec T est la statistique de décision utilisée pour le test, t est la valeur observée à partir de l'échantillon pour ladite statistique et α représente le seuil de confiance. Dans notre cas p-value < 2.2e-16 < 5% et donc on rejette H_0 : les données suivent une loi normale) pratiquement nulle. Ce qui nous conduit à confirmer le rejet de la normalité.

Globalement, l'hypothèse de bruit blanc est rejetée, et donc il faudra penser à d'autre type de modélisation. Ainsi, les modèles ARIMA semblent incapables de modéliser cette série et prendre en considération le phénomène de l'hétérosédasticité.

A cet égard et pour remédier à la défaillance du modèle, Engle propose en 1982 [1,2,3,6,7,8] les modèles ARCH (Auto Regressive Conditionally Heteroscedastic) qui seront généralisés en 1986 par GARCH (Generalized ARCH).

Le langage R (code utilisé ci-dessous avec le logiciel R) nous a proposé comme modèle GARCH (1,1) à travers le calcul de l'AIC et la comparaison de ce dernier entre différentes valeurs proposées (q= 5 et p = 4) (p et q représentent les degré du modèle GARCH) sont déterminés à partir de la propriété selon laquelle l'espérance conditionnelle du carré de x_t (la variance conditionnelle de $x_t : h_t$ est en effet l'espérance conditionnelle du carré de x_t car l'espérance conditionnelle du processus est nulle) suivant le modèle GARCH(p, q) admet une représentation ARMA(m,q) (le passage du modèle GARCH à un modèle ARMA est déjà démontré dans les pages 5 et 6), pour plus de visibilité nous allons créer une matrice des AIC (Akaike Information Criterion). Testant 20 modèles GARCH à l'aide du programme R ci-dessous qui nous permet d'obtenir la matrice suivante :

```
> AICS= fonction(a) {
+ aics =matrix(nrow=5, ncol=4)
+ for (p in 1:5){
+ for (q in 1:4){
+ res = garch(a, order=c(q,p))
+ aics[p,q]=AIC(res) }
+ }
+ aics
+ }
> library(tseries)
> AICS(a)
```

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]
[1,]	-7891.561	-7785.749	-7876.238	-7814.914
[2,]	-7890.763	-7888.840	-7884.153	-7873.516
[3,]	-7852.293	-7873.003	-7879.780	-7873.470
[4,]	-7833.830	-7875.295	-7864.895	-7869.776
[5,]	-7836.165	-7865.448	-7866.458	-7862.230

Matrice des AIC

La comparaison de ces résultats nous mène à opter pour le modèle GARCH (1,1) comme meilleur modèle pour représenter cette série financière.

Le modèle décrivant notre série s'écrit de la façon suivante :

$$x_t \text{ est un GARCH}(1,1) : x_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t \text{ et } h_t = w_0 + w_1 x_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

III.2 Estimation des paramètres

Compte tenu du caractère non linéaire des modèles GARCH, les paramètres de notre modèle GARCH (1, 1) sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance.

Nous allons établir cette estimation par le biais des commandes R suivantes :

- `g=garch (x=a,order=c(1,1))` [5](Pour déterminer au niveau du logiciel qu'il s'agit bien d'un GARCH (1,1)).
- Summary (g) [5](Pour donner une table d'analyse de variance contenant ainsi les valeurs w_0 , w_1 et β_1 et leurs niveau de significativité).

```
> summary(g)
```

```
Call:
```

```
garch(x = a, order = c(1, 1))
```

```
Model:
```

```
GARCH(1,1)
```

```
Residuals:
```

	Min	1Q	Median	3Q	Max
	-4.36486	-0.54587	0.09463	0.70255	3.04638

```
Coefficient(s):
```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
a0	2.715e-06	9.415e-07	2.884	0.00393	**
a1	6.640e-02	1.437e-02	4.620	3.83e-06	***
b1	9.024e-01	2.225e-02	40.553	< 2e-16	***

```
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Estimation des paramètres par le logiciel R

- Estimation des paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance :**

Considérons le modèle GARCH (1, 1) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t \\ h_t = w_0 + w_1 x_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \end{cases}$$

On notera θ le vecteur des paramètres du modèle $\theta = (w_0, w_1, \beta_1)^T$ qui appartient à un espace des paramètres définit par : $\Theta \subset \mathbb{R}^{1+p+q}$; pour notre cas $p=q=1$.

La vraisemblance gaussienne $L_T(x_t/F_t; \theta)$, pour un échantillon d'observation de taille T, est donnée par :

$$L_T(x_t/F_t; \theta) = \prod_{t=1}^T f_{x_t/F_t}(\theta) = \prod_{t=1}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2h_t}\right)$$

En passant par le logarithme, le problème de maximisation de la vraisemblance est équivalent à minimiser la fonction log-vraisemblance :

$$\ell_T(x_t/F_t; \theta) = \log\left(L_T(x_t/F_t; \theta)\right) = \sum_{t=1}^T I_t(x_t/F_t; \theta)$$

Avec
$$I_t(\theta) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(\frac{-x_t^2}{2h_t}\right)\right) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi h_t) - \frac{1}{2} \frac{x_t^2}{h_t}$$

Ce qui nous amène à calculer $\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta}$ et donc à calculer dans un premier temps $\frac{\partial I_t}{\partial \theta}$ puisque :

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \theta} = \frac{\partial \ell_t}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial \theta} + \frac{\partial \ell_t}{\partial h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} = \sum_{t=1}^T \frac{\partial I_t}{\partial \theta} = \sum_{t=1}^T \left(\frac{\partial I_t}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial \theta} + \frac{\partial I_t}{\partial h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \theta} \right)$$

Le gradient du modèle GARCH (1, 1) :

Considérons les dérivées suivantes :

$$\frac{\partial I_t}{\partial x_t} = -\frac{x_t}{h_t}$$

$$\frac{\partial I_t}{\partial h_t} = -\frac{1}{2h_t} + \frac{x_t^2}{2h_t^2}$$

De même :

$$\frac{\partial x_t}{\partial w_0} = 0$$

$$\frac{\partial x_t}{\partial w_1} = 0$$

$$\frac{\partial x_t}{\partial \beta_1} = 0$$

La forme récurrente de la variance conditionnelle nous permet de calculer explicitement sa dérivée par rapport à θ :

$$h_t = \sum_{s=0}^{t-2} \beta_1^s (w_0 + w_1 x_{t-s-1}^2) + \beta_1^{t-1} h_1$$

$$h_t = \frac{w_0(1 - \beta_1^{t-1})}{1 - \beta_1} + w_1 \sum_{s=0}^{t-2} \beta_1^s x_{t-s-1}^2 + \beta_1^{t-1} h_1$$

On changeant l'indice du second terme, on aura :

$$h_t = \frac{w_0(1 - \beta_1^{t-1})}{1 - \beta_1} + w_1 \sum_{s=1}^{t-1} \beta_1^{s-1} x_{t-s}^2 + \beta_1^{t-1} h_1$$

En commençant la récurrence par l'observation 0, on aurait

$$h_t = \frac{w_0(1 - \beta_1^t)}{1 - \beta_1} + w_1 \sum_{s=1}^t \beta_1^{s-1} x_{t-s}^2 + \beta_1^t h_0 \quad (1)$$

Autrement dit, si on réécrit l'équation en commençant par l'observation (1) de manière à la comparer avec celle exprimée précédemment, la variance conditionnelle s'écrit :

$$\begin{aligned} h_t &= \frac{w_0(1 - \beta_1^t)}{1 - \beta_1} + w_1 \sum_{s=1}^t \beta_1^{s-1} x_{t-s}^2 + \beta_1^t h_0 \\ h_t &= \frac{w_0(1 - \beta_1^t)}{1 - \beta_1} + w_1 \sum_{s=1}^{t-1} \beta_1^{s-1} x_{t-s}^2 + w_1 \beta_1^{t-1} x_0^2 + \beta_1^{t-1} h_0 + (\beta_1^t - \beta_1^{t-1}) h_0 \\ &= \frac{w_0(1 - \beta_1^t)}{1 - \beta_1} + w_1 \sum_{s=1}^{t-1} \beta_1^{s-1} x_{t-s}^2 + \beta_1^{t-1} (w_0 + w_1 x_0^2 + h_0 + (\beta_1 - 1) h_0) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$h_t = \frac{w_0(1 - \beta_1^t)}{1 - \beta_1} + w_1 \sum_{s=1}^{t-1} \beta_1^{s-1} x_{t-s}^2 + \beta_1^{t-1} h_1 \quad (2)$$

Dans la suite de ce paragraphe, on notera h_u la valeur initiale qui vaut h_0 pour l'équation (1) et h_1 pour l'équation (2). On passe aux calculs relatifs au gradient en utilisant l'équation (2).

Le calcul du gradient nécessite également de mesurer les dérivées partielles de h_t par rapport à θ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_t}{\partial w_0} &= \frac{(1 - \beta_1^t)}{1 - \beta_1} + \beta_1^{t-1} \frac{\partial h_u}{\partial w_0} \\ \frac{\partial h_t}{\partial w_1} &= \sum_{s=1}^{t-1} \beta_1^{s-1} x_{t-s}^2 + \beta_1^{t-1} \frac{\partial h_u}{\partial w_1} \\ \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} &= \frac{w_0(1 - t\beta_1^{t-1}) + w_0\beta_1^t(t-1)}{(1 - \beta_1)^2} + w_1 \sum_{s=1}^{t-1} (s-1) \beta_1^{s-2} x_{t-s}^2 + \beta_1^{t-1} \frac{\partial h_u}{\partial \beta_1} + (t-1)\beta_1^{t-2} h_u \end{aligned}$$

Finalement, le gradient de la vraisemblance est donné ainsi par :

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial w_0} = \frac{\partial \ell_t}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial w_0} + \frac{\partial \ell_t}{\partial h_t} \frac{\partial h_t}{\partial w_0} = \sum_{t=1}^T \left(0 + \left(-\frac{1}{2h_t} + \frac{x_t^2}{2h_t^2} \right) \left(\frac{(1-\beta_1^t)}{1-\beta_1} + \beta_1^{t-1} \frac{\partial h_u}{\partial w_0} \right) \right) = 0$$

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial w_1} = \frac{\partial \ell_t}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial w_1} + \frac{\partial \ell_t}{\partial h_t} \frac{\partial h_t}{\partial w_1} = \sum_{t=1}^T \left(0 + \left(-\frac{1}{2h_t} + \frac{x_t^2}{2h_t^2} \right) \left(\sum_{s=1}^{t-1} \beta_1^{s-1} x_{t-s}^2 + \beta_1^{t-1} \frac{\partial h_u}{\partial w_1} \right) \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_t}{\partial \beta_1} &= \frac{\partial \ell_t}{\partial x_t} \frac{\partial x_t}{\partial \beta_1} + \frac{\partial \ell_t}{\partial h_t} \frac{\partial h_t}{\partial \beta_1} \\ &= \sum_{t=1}^T \left(0 + \left(-\frac{1}{2h_t} + \frac{x_t^2}{2h_t^2} \right) \left(\frac{w_0(1-t\beta_1^{t-1}) + w_0\beta_1^t(t-1)}{(1-\beta_1)^2} + w_1 \sum_{s=1}^{t-1} (s-1) \beta_1^{s-2} x_{t-s}^2 + \beta_1^{t-1} \frac{\partial h_u}{\partial \beta_1} + (t-1)\beta_1^{t-2} h_u \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

A partir ces trois équations nulles on peut déduire facilement le vecteur des paramètres $\theta = (w_0, w_1, \beta_1)^T$ qu'on cherche à estimer.

Conclusion

Cet article a mis l'accent sur la contribution de la méthodologie ARCH au relâchement de l'hypothèse forte de la volatilité constante à travers le temps. Suite à l'article pionnier d'Engle [9], plusieurs variantes du modèle ARCH ont été proposées afin de donner une meilleure description et prévision de la volatilité. Les chercheurs exploitent principalement deux dimensions pour améliorer les modèles GARCH. D'abord, ils s'intéressent aux autres distributions que la loi Normale pour les innovations. Aussi, ils recherchent des modèles plus flexibles expliquant notamment l'évolution de la volatilité. Certes, la classe des modèles ARCH peut être divisée en deux sous-ensembles : les modèles ARCH linéaires et les modèles ARCH non linéaires. Les premiers regroupent les processus ARCH et GARCH décrits précédemment. D'autres modèles comme le modèle GARCH intégré (IGARCH) d'Engle et Bollerslev (1986) [2,6,8] et le modèle GARCH-in-mean (GARCH-M) d'Engle, Lilien et Robins (1987) [2,6,7,9] s'ajoutent à la liste des modèles linéaires.

Dans ce sens, les modèles ARCH et GARCH évoqués aux termes de cette étude nous ont permis d'exploiter le caractère hétéroscédastique des séries de rendements pour pouvoir

calculer la variance conditionnelle (en tenant compte de l'information antérieure) de l'indice CAC 40.

Ce travail nous a permis non seulement de mettre un aperçu théorique sur ces modèles, mais aussi confronter nos acquis en langage R à la pratique en vigueur.

Bibliographie

- [1]. AdamouYacouba Abdou, (2013) : *Estimation d'un modèle ARCH-GARCH avec prime d'asymétrie, mémoire de maîtrise économique, Maître ès sciences (M.Sc.), Québec, Canada, Université LAVAL.*
- [2]. Charpentier. A, (2002), *cours de série temporelle: Théorie et Applications, France, Université Paris IX Dauphine.*
- [3]. Gediminas Dubauskas, Deimantė Teresienė, (2005): *Autoregressive Conditional Skewness, Kurtosis and Jarque-Bera in Lithuanian Stock Market Measurement, ISSN 1392-2785 ENGINEERING ECONOMICS. 2005. No 5 (45), ECONOMICS OF ENGINEERING DECISIONS.*
- [4]. <http://docslide.net/documents/arch-garch.html#>, *Modèles ARCH/GARCH : Limites des modèles ARIMA et pratique des modèles ARCH/GARCH, HORMA Bouchaib & BOUKHNIF Mouhsine, 23 février 2010.*
- [5]. [http : //www.r-project.org/](http://www.r-project.org/), *site du projet R.*
- [6]. Hurlin. C, (2006-2007): *Modèles ARCH-GARCH, Application à la VaR, Master, Économétrie et statistique Appliquée (ESA), France, Université d'Orléans.*
- [7]. Ielpo. F, (2008) : *Econométrie de la Finance, Dexia Group, 7 /11 Quai André Citroën, 75015, Paris, Centre d'Économie de la Sorbonne.*
- [8]. Kamilia Berhoune, (2013) : *Processus ARCH-GARCH Applications. Mémoire de fin d'étude de master en mathématiques : probabilités statistique, République Algérienne Démocratique et Populaire, Université Abou Bekr Belkaid –Tlemcen-Faculté des Sciences.*
- [9]. Panait. I, Oana Slavescu. E., (2012), *Abstract: Using Garch-in-Mean Model to Investigate Volatility and Persistence at Different Frequencies for Bucharest Stock Exchange during 1997-2012, No. 5(570), page: 55-76.*